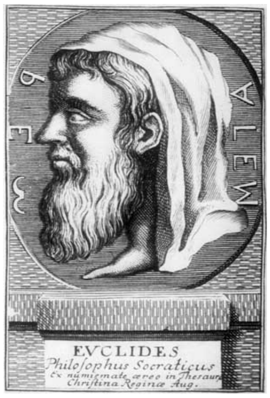


CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „EUCLID”
Focşani, 3 iunie 2017

Clasa a VII – a

Subiecte, soluţii şi barem de corectare

SUBIECTUL I

a) Fie numerele $x=(a-1)(a+1)$ şi $y=(a^2+1)(a^4+1)$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

Să se arate că numărul $n=x\cdot y+2a^4+2$ este pătrat perfect.

b) Să se afle numerele întregi n astfel încât numărul

$$\frac{\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{(1-3\sqrt{2})^2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{3n-1}\in\mathbb{Z}.$$

Prof. Claudia PASCARIU

Şcoala Gimnazială „Mihail Sadoveanu” Galaţi

SOLUŢIE

a) $x=a^2-1$ ... 1p

$x\cdot y=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)=(a^4-1)(a^4+1)=a^8-1$ ... 1p

$n=a^8-1+2a^4+2=(a^4+1)^2=$ pătrat perfect ... 1p

b) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}=\left|3-2\sqrt{2}\right|=3-2\sqrt{2}$ ... 1p

$\sqrt{(1-3\sqrt{2})^2}=\left|1-3\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}-1$ ... 1p

$\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}=\left|2-\sqrt{2}\right|=2-\sqrt{2}$ ... 1p

$\dfrac{3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}}{3n-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3n-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$ ... 1p

$3n-1\in D_4\Rightarrow n\in\{-1,0,1\}$ ... 2p

SUBIECTUL II

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$, dacă $\dfrac{(a^2+b^2)\sqrt{2}-4(a-b-2)\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

b) Dacă $x, y > 0$ atunci $\dfrac{x}{x+2y} + \dfrac{y}{y+2x} \geq \dfrac{2}{3}$.

Prof. Enache PĂTRAŞCU

Colegiul Naţional „Unirea" Focşani

SOLUŢIE

a) $\left((a^2+b^2)\sqrt{2}-4(a-b-2)\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q}$ ... 1p

deci

$\left(a^2+b^2-4a+4b+8\right)\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ ... 1p

de unde

$a^2+b^2-4a+4b+8=0$ ... 1p

sau

$(a-2)^2+(b+2)^2=0$

adică

$a=2$, $b=-2$ ... 2p

b) Fie $x+2y=u$, $y+2x=v$. Atunci

$$x=\frac{2v-u}{3},\ y=\frac{2u-v}{3},\ u,v>0$$ ... 1p

şi inegalitatea devine

$$\frac{2v-u}{3u}+\frac{2u-v}{3v} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{v}{u}+\frac{u}{v} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$(u-v)^2 \geq 0$$ ... 2p

Egalitatea are loc dacă $x=y$ ... 1p

SUBIECTUL III

În triunghiul dreptunghic ABC, $AB \perp AC$, punctul D este piciorul înălțimii din vârful A, iar P este punctul în care bisectoarea exterioară a unghiului B al triunghiului ABC intersectează bisectoarea exterioară a unghiului A al triunghiului ADC.

Dacă punctul M este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC, arătați că:

a) $[DM] \equiv [MP]$;

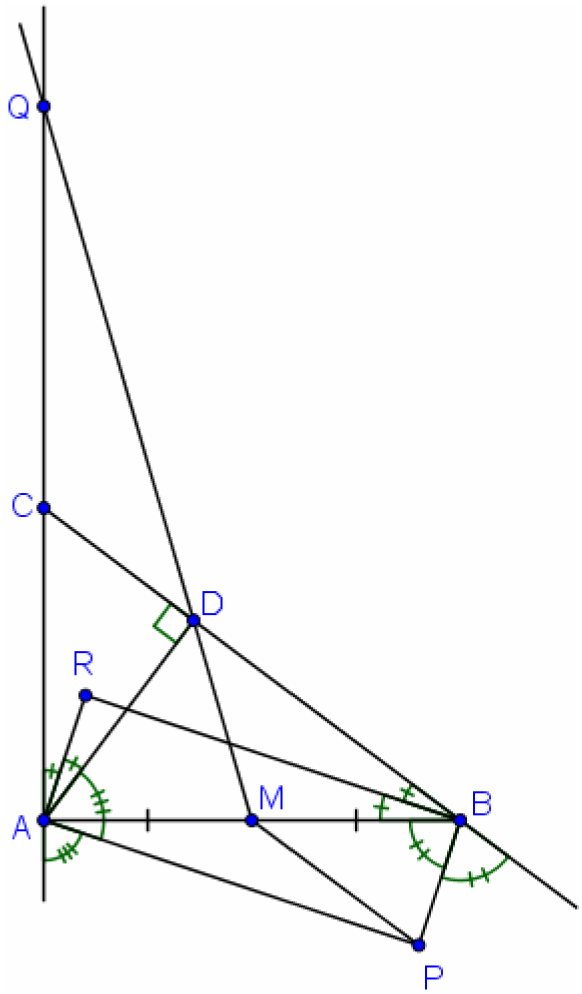
b) $MP \| BC$;

c) dacă $AC \cap MD = \{Q\}$, atunci $BD \cdot CQ = AQ \cdot CD$.

Prof. Maximilian OPAIȚ

Şcoala Gimnazială „George Tutoveanu” Bârlad

SOLUŢIE



a) Fie R punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor $C\hat{A}D$ şi $A\hat{B}C$.

Cum $CA\hat{D} \equiv A\hat{B}C$ (au drept complement $\hat{C}$), notăm ... 1p

$$m(C\hat{A}R) = \mathrm{m}(R\hat{A}D) = m(A\hat{B}R) = m(R\hat{B}C) = x^\circ$$

Cum

$$90^\circ = 2x^\circ + y^\circ,$$

unde $m(B\hat{A}D) = y^\circ$, obținem ... 2p

$$m(B\hat{R}A) = 2x^\circ + y^\circ = 90^\circ.$$

$AR \perp AP$ (bisectoare interioară şi exterioară)

$BR \perp BP$ (analog)

avem $ARBP$ dreptunghi, de unde

$m(\hat{P}) = 90^\circ$, ... 1p

În ΔADB, $m(\hat{D}) = 90^\circ$, DM - mediană, de unde $DM = \frac{AB}{2}$,

în ΔAPB, $m(\hat{P}) = 90^\circ$, PM - mediană, de unde $PM = \frac{AB}{2}$,

deci $DM = MP$ ... 2p

b) Din $APBR$ dreptunghi, $BR \parallel AP$ şi AB - secantă avem $m(M\hat{A}P) = x^\circ$

Cum $AM = MB = MP$ obținem ΔAMP isoscel, de unde $m(M\hat{P}A) = x^\circ$ şi

$m(B\hat{M}P) = 2x^\circ$ (unghi exterior).

Cum $m(C\hat{B}A) = 2x^\circ = m(B\hat{M}P)$, rezultă $MP \parallel BC$, c.c.t.d. ... 1p

c) Aplicând Teorema lui Menelaos pentru ΔABC cu $M - D - Q$:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

cu $\frac{AM}{MB} = 1$ obținem $\frac{BD}{DC} = \frac{QA}{QC}$,

de unde

$BD \cdot QC = AQ \cdot DC$, c.c.t.d. ... 2p

Notă:

La fiecare dintre cele trei subiecte se acordă câte un punct din oficiu.

Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.