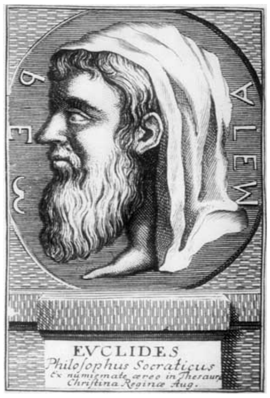
CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „EUCLID”
Focşani, 3 iunie 2017



Clasa a VI – a

Subiecte, soluţii şi barem de corectare

SUBIECTUL I

a) Dacă

$$a=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2016}\right) \text{ şi } b=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2017}\right),$$

să se calculeze $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{2017}$.

Prof. Dorina SAVIN

Şcoala Gimnazială Nr. 25 Galați

b) Câte soluții naturale are ecuația $x+y=2017$? Dar ecuația $x+y+z=2017$?

SOLUȚIE

a) $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2015}{2016}=\frac{1}{2016}$ ... 1p

$b=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2016}{2017}=\frac{1}{2017}$ ... 1p

$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{2017}=(2016-2017)^{2017}=-1$ ... 1p

b) $x+y=2017$

$(x,y)\in\{(0,2017),(1,2016),\ldots,(2017,0)\}=S$ ... 1p

$\operatorname{card} S=2018$ ... 1p

$x+y+z=2017$

Considerând $x+y=t$, obținem ecuația $t+z=2017$ care are 2018 soluții. ... 1p

Dar, pentru $t=0$ avem o soluție $(x,y)=(0,0)$

pentru $t=1$ avem 2 soluții $(x,y)\in\{(1,0),(0,1)\}$

$\vdots$

pentru $t=2017$ avem 2018 soluții ... 1p

În total avem

$1+2+\ldots+2018=\frac{2018\cdot 2019}{2}=1009\cdot 2019=2037171$ soluții. ... 2p

SUBIECTUL II

Fie $A = \left\{ x \in Q_+ \;\middle|\; \frac{5x+2}{x+2} \in N \right\}$. Să se afle:

a) $A \cap N$;

b) A.

Prof. Marius MOHONEA

Colegiul Național „Unirea" Focşani

SOLUȚIE

a) $x+2 \mid 5x+2$ ... 1p

$x+2 \mid 5x+10$ ... 1p

deci

$x+2 \mid 8$, ... 1p

deci

$x+2 \in \{1, 2, 4, 8\}$ ... 1p

adică

$A = \{0, 2, 6\}$ ... 1p

b) $\frac{5x+2}{x+2} < \frac{5x+10}{x+2} = 5$ ... 1p

$\frac{5x+2}{x+2} \in N$ ... 1p

deci

$\frac{5x+2}{x+2} \in \{0,1,2,3,4\}$ ... 1p

$A = \left\{0, \frac{2}{3}, 2, 6\right\}$ ... 1p

SUBIECTUL III

Se consideră triunghiul ABC, cu $m(B\hat{A}C) = 90^\circ$ şi $m(A\hat{B}C) = 30^\circ$ şi $[AN$ şi $[AM$ astfel încât $C\hat{A}N \equiv N\hat{A}M \equiv M\hat{A}B$, cu $N, M \in (BC)$.

Se consideră, de asemenea, $CE \perp AM$, $E \in (AM)$.

d) Dacă $AN \cap CE = \{T\}$, să se demonstreze că $C\hat{M}T \equiv T\hat{M}A$.

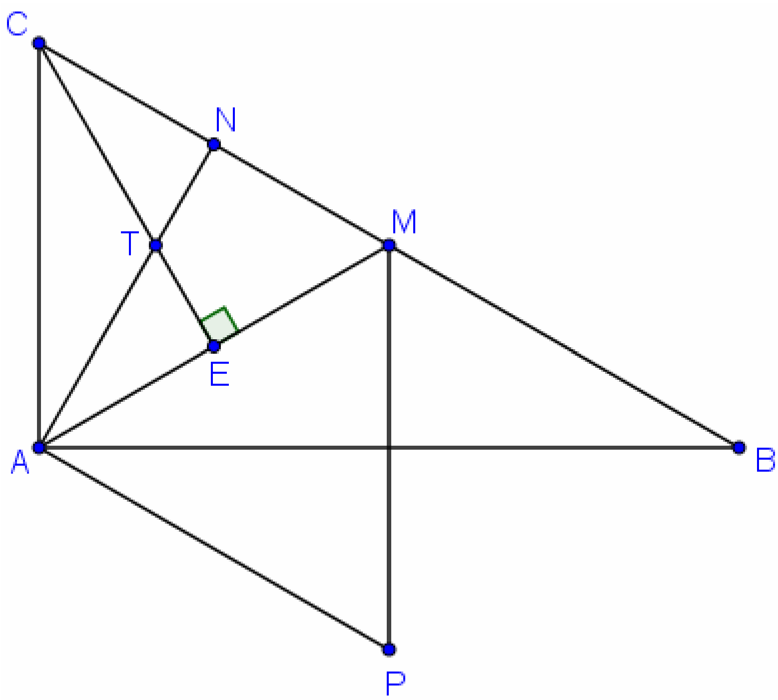
e) Să se demonstreze că $MT \parallel BA$.

f) Dacă notăm cu P simetricul punctului M față de AB, să se calculeze perimetrul triunghiului AMP, în ipoteza că $BC = 8cm$.

Prof. Dorina SAVIN

Şcoala Gimnazială Nr. 25 Galați

SOLUȚIE



a) $m(B\hat{A}C) = 90^\circ$ și $m(A\hat{B}C) = 30^\circ$, rezultă că $m(A\hat{C}B) = 60^\circ$

Rezultă, de asemenea, $m(C\hat{A}N) = m(N\hat{A}M) = m(M\hat{A}B) = 30^\circ$ ... 1p

$C\hat{A}N \equiv N\hat{A}M$, rezultă că AN este bisectoare ... 1p

$C\hat{A}M \equiv A\hat{C}M$, rezultă că triunghiul ACM este isoscel cu un unghi cu măsura de 60°, deci este triunghi echilateral ... 1p

CE este înălțime, deci este și bisectoare, adică T este punctul de intersecție al bisectoarelor, de unde rezultă că $[MT$ este bisectoare, deci $C\hat{M}T \equiv T\hat{M}A$ ... 1p

b) $m(C\hat{M}T) = 30^\circ = m(C\hat{B}A)$, unghiuri corespondente, deci $MT \parallel BA$ ... 2p

c) AB este mediatoarea segmentului $[MP]$, rezultă că ΔAMP este isoscel cu un unghi cu măsura de 60°, deci este triunghi echilateral ... 1p

$AM = AC = CM$ (ΔACM echilateral)

$AM = MB$ (ΔAMB isoscel) ... 1p

rezultă că

$$AM = CM = MB = \frac{BC}{2}$$

$P_{AMP} = \frac{3}{2}BC$

$P_{AMP} = 12cm$ ... 1p

Notă:

La fiecare dintre cele trei subiecte se acordă câte un punct din oficiu.

Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.